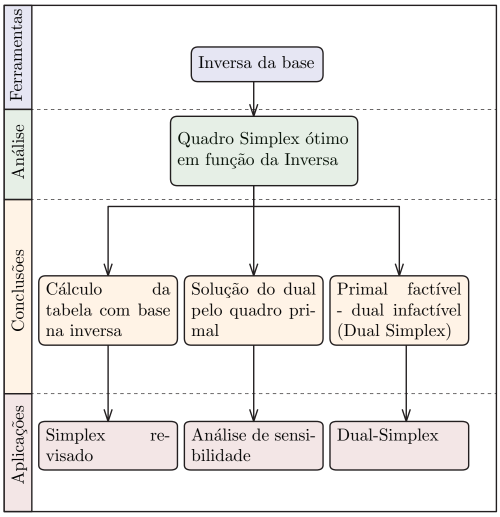


1 Relembrando

Relembrando onde verificamos a factibilidade **primal** e dual.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Como verificamos se a tabela acima é **primal**-factível?

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade primal está associada ao vetor b, ou seja:

$$b \geq 0$$

E a factibilidade dual? Como verificamos se a tabela é **dual** factível?

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

A factibilidade dual está associada ao vetor de custos da função objetivo, ou seja:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq 0$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	1

Ainda, na otimalidade a tabela mantém tanto a factibilidade primal quanto dual.

2 Motivação

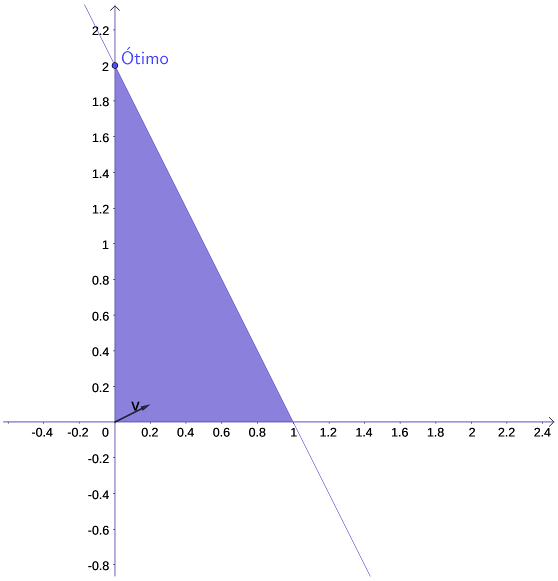
Na prática, após encontrar a solução de problema de PL, muitas vezes é necessário fazer pequenas modificações no problema original. Por exemplo a adição de uma **nova restrição**. Essa nova restrição pode infactibilizar a solução ótima, o que implicaria em resolver todo o problema novamente.

Considere o par primal-dual de modelos de PLs:

$$\begin{array}{lrrl} \text{max z} = & 2x_1 & +x_2 & \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & , x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{min v} = & 2\pi_1 & \\ & 2\pi_1 & \geq 2 \\ & \pi_1 & \geq 1 \\ & \pi_1 & \geq 0 \end{array}$$

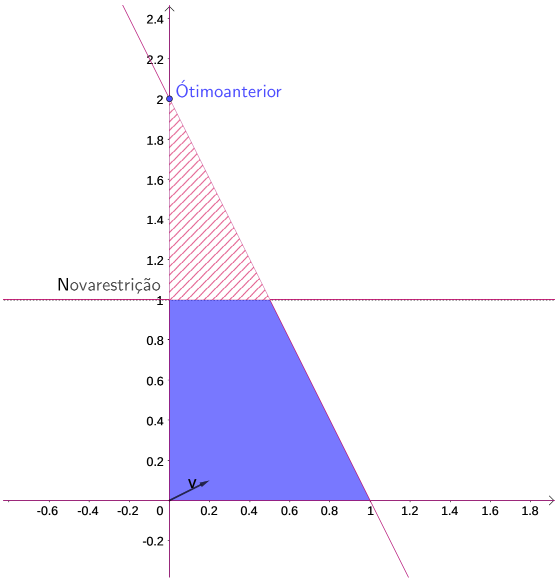
VB	x_1	x_2	x_3	$-z$
	0	0	1	2
x_2	2	1	1	2



Imagine que por algum motivo, após a otimização, seja necessário inserir a nova restrição ao modelo:

$$x_2 \leq 1$$

A solução ótima anterior não está mais na região factível do problema.



Podemos perceber essa infactibilidade no quadro Simplex. Inserindo a variável de folga da restrição, ficamos com:

$$x_2 + x_4 = 1$$

Ao inserirmos essa linha no quadro Simplex (no quadro ótimo), ficamos com:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
??	0	1	0	1	1

Note que, como inserimos uma nova restrição, precisamos adicionar uma nova variável à base.

Via de regra, sempre inserimos a folga da nova restrição como variável básica (nesse caso x_4), e mantemos todas as outras iguais.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	0	1	0	1	1

Porém, percebemos que o sistema deixou de estar na forma canônica em relação à variável x_2, de forma que precisamos realizar a operação $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ para manter x_2 na base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	0	1	0	1	1

A nova tabela fica então:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Note que a infactibilidade é apontada pela negatividade da variável ($b < 0$).

Sabemos também, que associado a todo quadro Simplex temos uma solução para o problema dual equivalente (π):

			$-\pi_1$	$-\pi_2$	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Note que a inserção da nova restrição, **não afetou a condição de factibilidade dual**, ou seja, o termo:

$$\boxed{\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0}$$

ainda é valido (todos os coeficientes da função objetivo ≥ 0). Mas por quê isso acontece?

Vejamos como a nova restrição fica no par primal-dual:

$$\begin{array}{rlll}
\max z = & 2x_1 & +x_2 & \\
& 2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\
& 0x_1 & +x_2 & \leq 1 \\
& x_1 & ,\, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\min v = & 2\pi_1 & \pi_2 & \\
& 2\pi_1 & +0\pi_2 & \geq 2 \\
& \pi_1 & +\pi_2 & \geq 1 \\
& \pi_1 & ,\pi_2 & \geq 0
\end{array}$$

Ou seja, a inserção da nova restrição no primal gera uma nova **variável** no dual; de forma que, se a solução dual anterior já era dual-factível, podemos atribuir o valor de zero a nova variável, e a nova solução continuará sendo dual factível.

Substituindo a solução dual $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

			$-\pi_1$	$-\pi_2$	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

$$\begin{array}{rlll}
\min v = & 2 \cdot 1 + & 0 \cdot 0 & \\
& 2 \cdot 1 & +0 \cdot 0 & \geq 2 \\
& 1 \cdot 1 & +1 \cdot 0 & \geq 1 \\
& 1 & 0 & \geq 0
\end{array}$$

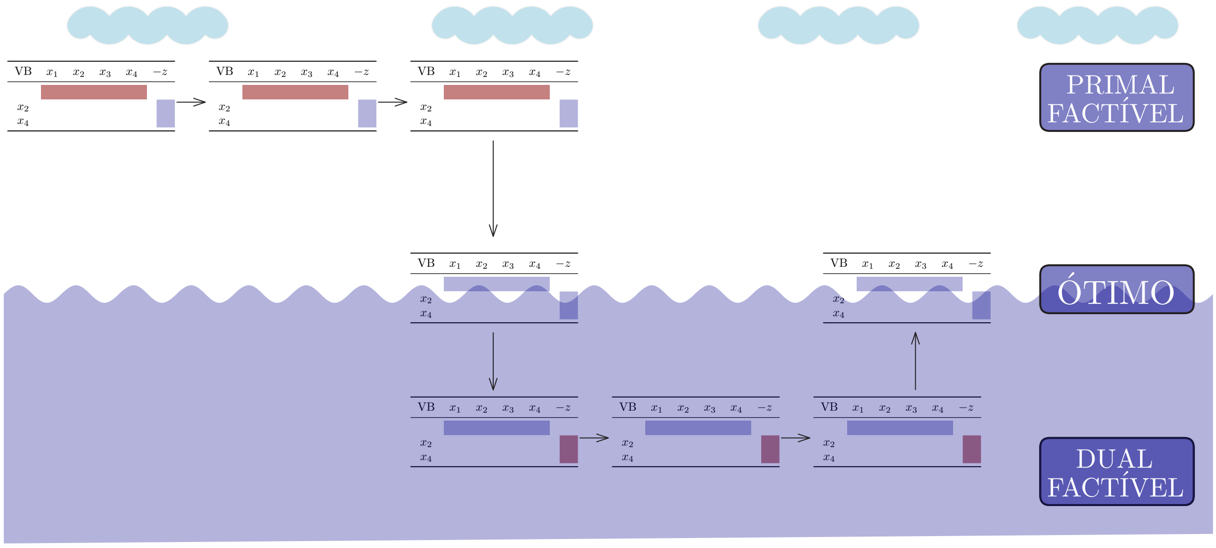
Substituindo a solução dual $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ (multiplicado por -1 devido a função objetivo de maximização) no modelo:

$$\begin{array}{rlllll}
\min v = & 2 \cdot 1 + & 0 \cdot 0 & \Rightarrow 2 & \\
& 2 \cdot 1 & +0 \cdot 0 & \geq 2 & \Rightarrow 2 \geq 2 \checkmark \\
& 1 \cdot 1 & +1 \cdot 0 & \geq 1 & \Rightarrow 1 \geq 1 \checkmark \\
& 1 & 0 & \geq 0 &
\end{array}$$

Todas as restrições duais ainda são satisfeitas.

3 A intuição do método

A ideia geral do método dual-Simplex é, a partir de um quadro Simplex infactível para o primal, porém factível para o dual, tentar recuperar a factibilidade primal mantendo a factibilidade dual. Se isso ocorrer, sabemos que atingimos o ótimo.



O método dual Simplex usa a mesma tabela do primal, porém "olhando" para a solução dual (π). O método pivoteia a tabela buscando retomar a factibilidade primal:

$$b \geq 0$$

Ao mesmo tempo em que mantém a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Dessa forma, iniciamos o método escolhendo a **variável que sai da base** (ao contrário do Simplex). Como queremos retomar a factibilidade (deixar $b \geq 0$), escolhemos a variável com o valor de b **mais negativo**, ou seja, selecionamos o valor de b da linha r (b_r) de tal forma que:

$$\bar{b}_r = \min \{\bar{b}_i\}, \qquad \forall i \in 1, ..., m, \quad \bar{b}_i < 0$$

Na nossa tabela temos que:

$$\bar{b}_r = \min \{-1\} \Rightarrow \bar{b}_3 = -1$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	
	0	0	1	0	2	
x_2	2	1	1	0	2	
x_4	-2	0	-1	1	-1	-1

Portanto a variável que deixará a base (linha) é x_4. Agora devemos escolher a variável que vai entrar (coluna). Com a seleção dessa variável, teremos o nosso elemento pivô, de forma que pivotearemos a tabela para ficar na forma canônica em relação a nova variável.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	
	0	0	1	0	2	
x_2	2	1	1	0	2	
x_4	-2	0	-1	1	-1	$\rightarrow$

A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha pelo próprio elemento pivô.
Como queremos deixar $b \geq 0$, e $b_r < 0$, a divisão:

$$b_r / a_{r,s} \geq 0$$

Só é válida quando $a_{r,s} < 0$. Dessa forma, só podemos olhar para os elementos da linha r **que são negativos**.

	??	??	??	??		
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	
	0	0	1	0	2	
x_2	2	1	1	0	2	
x_4	-2	0	-1	1	-1	$\rightarrow$

Além de selecionar somente entre os elementos negativos, devemos também manter a factibilidade dual:

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq 0$$

Ou seja, após realizarmos o pivoteamento, os coeficientes da função objetivo devem se manter positivos. Para encontrar o elemento pivô que mantém a relação verdadeira, precisamos determinar de forma genérica o que ocorre com os elementos da função objetivo, de acordo com o pivô escolhido.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	

Elemento $a_{r,s} = a_{3,1}$ Linha r = 3

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	-2/-1	0/-1	-1/-1	1/-1	-1/-1

Coluna s = 3

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{-1}$	$\frac{a_{3,2}}{-1}$	$\frac{a_{3,3}}{-1}$	$\frac{a_{3,4}}{-1}$	-1/-1

VB	x_1 (c_1)	x_2	x_3 (c_3)	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	-1/-1

$c_3 - c_3\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	-1/-1

$c_1 - c_3\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$ $c_2 - c_3\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$ $c_3 - c_3\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$ $c_4 - c_3\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	-2	0	0	1	1
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{a_{3,3}}$	-1/-1

$c_1 - c_s\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}}$ $c_2 - c_s\frac{a_{r,2}}{a_{r,s}}$ $c_3 - c_s\frac{a_{r,3}}{a_{r,s}}$ $c_4 - c_r\frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	-2	0	0	1	1
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1
	1	2	3	4	
	$\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,2}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,3}}{a_{r,s}}$	$\frac{a_{r,4}}{a_{r,s}}$	-1/-1

Já selecionamos a coluna do elemento pivô, ou seja, $r = 3$. Chamando as colunas de s, temos que o elemento $a_{r,s} = a_{3,1} = -1$.

Devemos então escolher uma coluna s para o elemento pivô. Suponha que escolhemos o elemento pivô $a_{r,s} = a_{3,3} = -1$. A primeira operação no pivoteamento é a divisão da linha todo pelo elemento.

Podemos usar os índices das colunas para generalizar os elementos das operações.

Da mesma forma podemos substituir o elemento -1 pelo elemento pivô $= a_{3,3}$. Ainda, se chamarmos os elementos da função objetivo de c, podemos determinar a operação que deve ser realizada para zerar o elemento $c_3 = 1$:

$$c_3 - c_3 \frac{a_{3,3}}{a_{3,3}}$$

Essa mesma operação será realizada em todos os elementos da função objetivo, mudando Assim, conseguimos escrever tudo em função do pivô (da linha r e da coluna s).

Escrevendo os elementos que variam em função do índice j, têmos a expressão genérica para os valores dos coef. da função objetivo, em relação ao elemento pivô (linha r e coluna s):

$$c_j = c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \text{ para } j = 1, ..., n$$

Agora podemos analisar como manter a factibilidade com base nessa expressão. Para o dual ser factível, os coef. da função objetivo devem ser ≥ 0, assim, temos que:

$$c_j - c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} \geq 0$$

$$c_j \geq c_s \frac{a_{r,j}}{a_{r,s}}$$

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

A desigualdade foi invertida na última passagem pois $a_{r,j} < 0$.

Temos então que

$$\frac{c_j}{a_{r,j}} \leq \frac{c_s}{a_{r,s}}$$

É equivalente à

$$\boxed{\frac{c_s}{a_{r,s}} = \max_{\{j|j \in N, a_{r,j} < 0\}} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},}$$

Ou seja, selecionamos a coluna s como o maior valor de todas as divisões dos coeficientes da função objetivo e os valores da linha da variável que sai da base (todos aqueles negativos).

4 Condições para aplicar o Dual-Simplex

Com a variável que sai da base (linha r) e a variável que entra (coluna s), basta fazer o pivoteamento no elemento $a_{r,s}$. Em seguida, se ainda existirem valores de $b < 0$ o procedimento é repetido. Se as seguintes condições forem satisfeitas, o algoritmo Dual-Simplex pode ser aplicado:

1. A tabela está na forma canônica.
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual.
3. Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal.

5 O algoritmo Dual-Simplex

O algoritmo Dual-Simplex fica então, partindo de um quadro Simplex em que as condições acima são satisfeitas:

1. (critério de otimalidade): Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima.
2. (seleção da variável que sai da base): selecione a variável que sai da base na linha r, de acordo com:
$$\bar{b}_r = \underset{\{\forall i \in 1,\ldots,m, \bar{b}_i < 0\}}{min} \bar{b}_i$$
3. (seleção da variável que entra na base): selecione a variável da coluna s de forma que:
$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \underset{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}}{max} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$
Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.
4. (pivoteamento): Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

6 Exemplo

Considerando a tabela do exemplo inicial (já com a restrição adicionada). Verificamos se as condições para aplicarmos o método são satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica. ✓
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual. ✓
3. Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal. ✓

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Vemos que existe $b < 0$.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Selecionamos então a linha de b com valor mais negativo, ou seja:

$$\bar{b}_r = min\{-1\} = -1$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Portanto $r = 3$ e a variável que sai da base é x_4.

Agora, criamos o conjunto com todos os elementos da divisão dos coeficientes da função objetivo pelo coeficientes da linha da variável que sai $r = 3$ (somente onde os coeficientes são negativos). Selecionamos o máximo desse conjunto, que se refere a coluna da **variável que entra na base**.

$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = max\left\{\frac{0}{-2}, \frac{1}{-1}\right\} = 0$$

Ou seja, a variável que entra na base é x_1 na coluna $s = 1$. Dessa forma, o elemento pivô é $a_{3,1} = -2$.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	2	1	1	0	2
x_4	-2	0	-1	1	-1

Para pivotearmos o elemento $a_{3,1} = -2$, fazemos as seguintes operações:

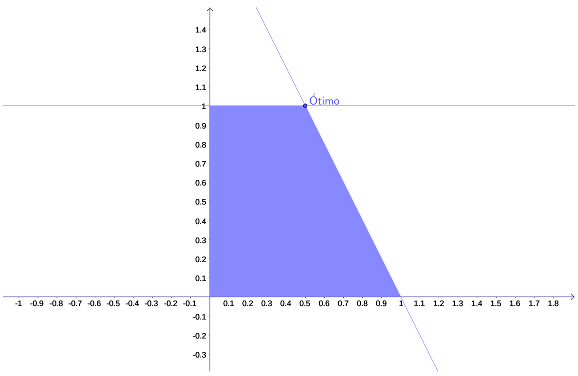
1. $L_3 \leftarrow L_3/2$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	1	1
x_1	1	0	1/2	-1/2	1/2

Como nenhum $b < 0$ a solução é primal factível. Ainda, como $c \geq 0$ ela também é primal factível, de forma que a solução é ótima.

A nova solução ótima é mostrada no gráfico. Compare com o gráfico no inicio da apresentação.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	1	1
x_1	1	0	1/2	-1/2	1/2



1. O método Dual-Simplex funciona exatamente como o Simplex, somente **alterando a ordem e o critério** de escolha das variáveis que entram e saem da base.

2. Se após a otimização precisarmos adicionar novas restrições no problema, e o mesmo se tornar infactível, podemos usar o método Dual-Simplex para aproveitar o quadro atual, ao invés recomeçar a otimização do zero.
3. Antes de aplicar o método, **garantir que as condições são satisfeitas**.
4. Podemos usar o Dual-Simplex em outras ocasiões (não somente ao adicionar restrições), por exemplo no lugar de aplicar a Fase I para encontrar uma solução inicial viável.